TEME RECAPITULATIVE
PENTRU SUBIECTUL al III-lea BACALAUREAT

LIMITE DE FUNCŢII

Limita unei funcţii într-un punct

Fie funcţia $f : D \to R$, $D \subset R$, x_0 un punct de acumulare al lui D, $x_0 \in \overline{R}$, şi $\ell \in \overline{R}$

<u>Definiţia limitei (Criteriul cu vecinătăţi)</u>
Funcţia f are limită în punctul x_0 egală cu ℓ dacă pentru orice vecinătate V a lui ℓ, $\exists$ U o vecinătate a lui x_0 a.î. pentru $\forall x \in D \cap U$, $x \neq x_0$ să avem $f(x) \in V$.

Limite laterale

Fie $f : D \to R$, $D \subset R$, x_0 un punct de acumulare al lui $D' = \{x \in D / x < x_0\}$, $\ell_s \in \overline{R}$, funcţia f are limită la stânga în
punctul x_0 egală cu ℓ_s dacă restricţia lui f la D' are limită în x_0. Analog la dreapta. Notaţii:

$\ell_s = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ sau $\ell_s = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \uparrow x_0}} f(x)$ sau $f(x_0 - 0)$; $\ell_d = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ sau $\ell_d = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \downarrow x_0}} f(x)$ sau $f(x_0 + 0)$;

Teoremă

Fie $f : D \to R$, $D \subset R$, $x_0 \in R$ un punct de acumulare pentru D astfel încât să existe limite laterale în x_0. Atunci funcţia f are limită în $x_0 \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ şi avem $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.

Observaţie: Limitele laterale se folosesc:
a) în punctele în care o funcţie definită pe ramuri îşi schimbă expresia;
b) dacă trecând la limită obţinem $\frac{a}{0}$;
c) dacă domeniul de definiţie este restrictiv la x_0.

Operaţii cu limite de funcţii

Fie funcţiile $f, g : D \to R$, $D \subset R$, x_0 un punct de acumulare pentru D astfel încât să existe limite în x_0.
Atunci :

1) $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, (excepţie $\infty - \infty$) ;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} (fg)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, (excepţie $\infty 0$) ;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, (excepţie $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$);

4) $\lim_{x \to x_0} (f(x))^{g(x)} = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)^{\lim_{x \to x_0} g(x)}$, (excepţie $1^{\infty}, 0^0, \infty^0$).

Criteriul majorării

Fie funcţiile f, g : $D \to R$, $D \subset R$, x_0 un punct de acumulare pentru D. Dacă:

1) $|f(x) - \ell| \le g(x)$ şi $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ atunci $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, $\ell \in R$.

2) $f(x) \ge g(x)$ şi $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ atunci $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

3) $f(x) \le g(x)$ şi $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ atunci $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

LIMITELE UNOR FUNCŢII STUDIATE

Limitele unor funcţii elementare

1) Funcţia polinomială:

$f : R \to R$, $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$, $a_n \ne 0$;

Atunci :

i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, $\forall$ $x_0 \in R$ (x_0– punct finit de acumulare)

ii) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} a_n x^n = \begin{cases} +\infty, a_n > 0 \\ -\infty, a_n < 0 \end{cases}$,

iii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n = \begin{cases} -\infty, a_n > 0 \\ +\infty, a_n < 0 \end{cases}$;

2) Funcţia raţională: $f : D \to R$, unde

$D = R \setminus \{x / Q(x) = 0\}$ $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{a_n x^n + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + ... + b_1 x + b_0}$, unde P(x) şi Q(x) sunt funcţii polinomiale;

Atunci : $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to x_0} \dfrac{a_n x^n + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + ... + b_1 x + b_0}$, $\forall$ $x_0 \in R$ (x_0– punct finit de acumulare)

este :

i) $\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ dacă $Q(x_0) \ne 0$;

ii) dacă $P(x_0) = 0$ şi $Q(x_0) = 0$ se simplifică, în prealabil, cu factorul $x - x_0) \ne$ şi apoi se trece la limită;

iii) se calculează limitele laterale dacă $P(x_0) \ne 0$ şi $Q(x_0) = 0$;

iv) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 \quad , \text{dacă } n < m \\ \dfrac{a_n}{b_m}, \text{dacă } n = m \\ -\infty, \text{dacă } n > m \text{ şi } a_n b_m < 0 \\ +\infty, \text{dacă } n > m \text{ şi } a_n b_m > 0 \end{cases}$,

v) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 \quad , dacă\ n < m \\ \frac{a_n}{b_m}, dacă\ n = m \\ -\infty, dacă\ n-m = 2k\ şi\ a_n b_m < 0 \\ -\infty, dacă\ n-m = 2k-1\ şi\ a_n b_m > 0 \\ +\infty, dacă\ n-m = 2k\ şi\ a_n b_m > 0 \\ +\infty, dacă\ n-m = 2k-1\ şi\ a_n b_m < 0 \end{cases}$$

3) Funcţia radical : $f : D \to D$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ şi unde $D = [0, \infty)$ dacă n este par şi D = R dacă n este impar;
Atunci :

i) exponent par: $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt[2n]{x}$,

i1) $\lim_{x \to x_0} \sqrt[2n]{x} = \sqrt[2n]{x_0}$, $x_0 \in [0, \infty)$;

i2) $\lim_{x \to \infty} \sqrt[2n]{x} = +\infty$;

ii) exponent impar: $f : R \to R$, $f(x) = \sqrt[2n+1]{x}$,

ii1) $\lim_{x \to x_0} \sqrt[2n+1]{x} = \sqrt[2n+1]{x_0}$, $x_0 \in R$,

ii2) $\lim_{x \to \infty} \sqrt[2n+1]{x} = +\infty$,

ii3) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt[2n+1]{x} = -\infty$;

4) Funcţia exponenţială: $f : R \to (0, \infty)$, $f(x) = a^x$, $a > 0$ şi $a \neq 1$;

i) $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$,

ii) $\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a \in (0,1) \\ +\infty, & a > 1 \end{cases}$,

iii) $\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ +\infty, & a \in (0,1) \end{cases}$.

5) Funcţia logaritmică: $f : (0, \infty) \to R$, $f(x) = \log_a x$, $a > 0$ şi $a \neq 1$;

i) $\lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0$, $x_0 \in (0, \infty)$,

ii) $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & a \in (0,1) \\ -\infty, & a > 1 \end{cases}$,

iii) $\lim_{x \to +\infty} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & a \in (0,1) \\ +\infty, & a > 1 \end{cases}$;

6) Funcţiile trigonometrice directe:

a) <u>**Sinus**</u> : $f : R \to [-1,1]$, $f(x) = \sin x$,

i) $\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$, pentru $x_0 \in R$,

ii) nu are limită pentru $x \to \pm\infty$;

b) **<u>Cosinus :</u>** $f : R \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$,

i) $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$, pentru $x_0 \in R$,

ii) nu are limită pentru $x \to \pm\infty$;

c) **<u>Tangentă :</u>** $f : D \to R$, $f(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, unde $D = R \setminus \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2} / x \in Z\right\}$,

i) $\lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0$, cu $x_0 \in D = R \setminus \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2} / x \in Z\right\}$,

ii) nu are limită pentru $x \to \pm\infty$;

iii) **limite laterale:**

a) $\ell_s = \lim\limits_{x \uparrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = +\infty$, $\ell_d = \lim\limits_{x \downarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = -\infty$;

b) $\ell_s = \lim\limits_{x \uparrow (2k+1)\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = +\infty$, $\ell_d = \lim\limits_{x \downarrow (2k+1)\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = -\infty$;

d) **<u>Cotangentă :</u>** $f : D \to R$, $f(x) = \operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, unde $D = R \setminus \{k\pi / x \in Z\}$;

i) $\lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0$, cu $x_0 \in D = R \setminus \{k\pi / x \in Z\}$,

ii) nu are limită pentru $x \to \pm\infty$;

iii) **limite laterale:**

a) $\ell_s = \lim\limits_{x \uparrow 0} \operatorname{ctg} x = -\infty$, $\ell_d = \lim\limits_{x \downarrow 0} \operatorname{ctg} x = +\infty$;

b) $\ell_s = \lim\limits_{x \uparrow k\pi} \operatorname{ctg} x = -\infty$, $\ell_d = \lim\limits_{x \downarrow k\pi} \operatorname{ctg} x = +\infty$;

6) Funcţiile trigonometrice inverse:

a) **<u>Arcsin :</u>** $f : [-1, 1] \to [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$, $f(x) = \arcsin x$;

$$\lim_{x \to x_0} \arcsin x = \arcsin x_0, \quad x_0 \in [-1, 1]$$

b) **<u>Arccos :</u>** $f : [-1, 1] \to [0, \pi]$, $f(x) = \arccos x$;

$$\lim_{x \to x_0} \arccos x = \arccos x_0, \quad x_0 \in [-1, 1]$$

c) **<u>Arctg :</u>** $f : R \to (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$;

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0, \quad x_0 \in R,$$

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \to \infty} \operatorname{arctg} x = +\frac{\pi}{2};$$

d) **<u>Arcctg :</u>** $f : R \to (0, \pi)$, $f(x) = \operatorname{arcctg} x$;

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} x_0, \quad x_0 \in R,$$

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi, \quad \lim_{x \to \infty} \operatorname{arcctg} x = 0.$$

Limite tip

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{x^n}=+\infty$, $a>1$,

Observaţie: Funcţia exponenţială tinde mai repede la $+\infty$ decât orice funcţie putere.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$, 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\, x}{x}=1$, 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\, x}{x}=1$,

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$, 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^r-1}{x}=r$, 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$, 9) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$, $a>0$, $a\neq 1$;

Limitele tip ale funcţiilor compuse

1) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ f(x_0)=0}}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$, 2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ f(x_0)=0}}\dfrac{\arcsin f(x)}{f(x)}=1$, 3) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ f(x_0)=0}}\dfrac{\mathrm{tg}\, f(x)}{f(x)}=1$, 4) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ f(x)=0}}\dfrac{\mathrm{arctg}\, f(x)}{f(x)}=1$,

5) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ f(x_0)=0}}\left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$, 6) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ f(x_0)=0}}\dfrac{(1+f(x))^r}{f(x)}=r$, 7) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ f(x_0)=0}}\dfrac{\ln(1+f(x))}{f(x)}=1$,

8) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ f(x_0)=0}}\dfrac{a^{f(x)}-1}{f(x)}=\ln a$, $a>0$, $a\neq 1$;

ASIMPTOTELE FUNCŢIILOR REALE

Asimptote orizontale

Fie funcţia $f: D\to R$, $D\subset R$, dacă $+\infty$ este punct de acumulare pentru D şi dacă $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell\in R$, atunci dreapta $y=\ell$ este **asimptotă orizontală** către $+\infty$; analog spre $-\infty$;

Asimptote oblice

Fie funcţia $f: D\to R$, $D\subset R$, dacă $+\infty$ este punct de acumulare pentru D, dacă $\exists\ m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}\in R^*$ şi $n=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-mx]\in R$, atunci dreapta $y=mx+n$ este **asimptotă oblică** spre $+\infty$; analog spre $-\infty$;

Asimptote verticală

Fie funcţia $f: D\to R$, $D\subset R$, dacă x_0 este punct de acumulare pentru D şi

– dacă $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$ este infinită ($+\infty$ sau $-\infty$) atunci $x=x_0$ este **asimptotă verticală la stânga**;

– dacă $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$ este infinită ($+\infty$ sau $-\infty$) atunci $x=x_0$ este **asimptotă verticală la dreapta**;

– dreapta $x=x_0$ este **asimptotă verticală** dacă este asimptotă la stânga şi la dreapta.

Observaţii:
1) Asimptotele orizontale exclud asimptotele oblice şi invers;
2) Asimptotele verticale se studiază la capete de interval deschis număr finit;
3) Funcţia polinomială nu are asimptotă orizontală;
4) Asimptotele orizontale şi oblice pot fi intersectate de graficul funcţiei;
5) Asimptotele verticale nu pot fi intersectate de graficul funcţiei.

FUNCŢII CONTINUE

<u>Definiţie</u>: Fie funcţia $f : D \to R$, $D \subset R$, şi $x_0 \in D$, funcţia f este **continuă** în x_0 dacă există limita funcţiei f în x_0 şi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, sau $\ell_s = \ell_d = f(x_0)$;

Observaţie:
1) Dacă x_0 este un punct izolat a lui D atunci condiţia de continuitate este automat verificată;
2) Dacă funcţia f este continuă în fiecare punct al mulţimii D, atunci ea este **continuă pe mulţimea** D.

Continuitate la stânga , continuitate la dreapta

Fie funcţia $f : D \to R$, $D \subset R$, şi $x_0 \in D$,
– funcţia f se numeşte **continuă la stânga** în x_0 dacă există limita la stânga

$$f(x_0 - 0) \text{ şi } f(x_0 - 0) = f(x_0);$$

– funcţia f se numeşte **continuă la dreapta** în x_0 dacă există limita la dreapta

$$f(x_0 + 0) \text{ şi } f(x_0 + 0) = f(x_0);$$

Puncte de discontinuitate

– Dacă funcţia f nu este continuă în x_0 ea se numeşte **discontinuă** în x_0;
– Un punct x_0 în care f nu este continuă se numeşte punct de **discontinuitate de prima speţă** (sau punct de discontinuitate de speţa întâi) dacă în x_0 punct de discontinuitate de speţa întâi) dacă în x_0 funcţia are limite laterale finite şi diferite;
– Un punct x_0 în care f nu este continuă se numeşte punct de **discontinuitate de speţa a doua** dacă nu este de prima speţă;

Teoreme

1) Orice funcţie monotonă poate avea cel mult puncte de discontinuitate de speţa întâi ;
2) Funcţiile elementare sunt continue pe domeniul maxim de definiţie;

Funcţii continue pe intervale

Fie funcţia $f : D \to R$, o funcţie mărginită pe D şi $m = \inf\limits_{x \in D} f(x)$ şi $M = \sup\limits_{x \in D} f(x)$ marginile ei,

funcţia f îşi atinge marginile dacă $\exists\ \alpha \in D$ a.î. $m = f(\alpha)$ şi $\exists\ \beta \in D$ a.î. $M = f(\beta)$.

Proprietatea lui Darboux(a valorilor intermediare)

Fie $I \subset R$ un interval , funcţia $f : I \to R$ are proprietatea lui Darboux pe intervalul **I** dacă pentru

$\forall x_1, x_2 \in I$, cu $x_1 < x_2$ şi $\forall$ c situat între $f(x_1)$ şi $f(x_2)$, atunci $\exists\ \xi \in (x_1, x_2)$ a.î. $f(\xi) = c$.

Observaţii:
1) Proprietatea lui Darboux caracterizează o funcţie care transformă un interval într – un interval;
2) O funcţie poate avea această proprietate fără să fie continuă;
3) Orice funcţie continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux;

Lemă

Dacă $\varphi : [a, b] \to R$ este continuă pe [a, b] şi $\varphi(a)\,\varphi(b) < 0$ atunci $\exists$ cel puţin un punc $\xi \in (a,b)$ a.î. $\varphi(\xi) = 0$.

Corolar 1

Dacă funcţia f este continuă pe un interval I şi nu se anulează pe I, atunci f păstrează semn constant pe I;

Corolar 2

Dacă f este continuă pe un interval I, atunci mulţimea valorilor funcţiei f (I) este de asemenea un interval;

Teoreme

1) Dacă f este monotonă pe un interval I şi f are proprietatea lui Darboux pe I atunci f este continuă pe I;
2) Fie f o funcţie continuă pe un interval I şi J = f (I) atunci funcţia $f : I \to J$ este bijectiv $\Leftrightarrow$ este strict monotonă şi în acest caz $f^{-1} : J \to I$ este continuă şi strict monotonă.

Funcţii continue pe intervale – aplicaţii la rezolvarea unor ecuaţii

Folosind **lema** rezultă că ecuaţia f (x) = 0 are cel puţin o soluţie într-un interval (a,b) dacă f este continuă pe [a, b] şi $f(a)\,f(b) < 0$,

Funcţii continue pe intervale – aplicaţii la stabilirea semnului unei funcţii

Din **Corolarul** 1, după determinarea rădăcinilor (zerourilor) unei funcţii continue, pe fiecare interval, în parte, este suficient să calculăm o valoare a funcţiei pentru a stabili semnul pe acel interval.

FUNCŢII SPECIALE
Funcţia lui P.L. Dirichlet

Fie funcţia : $R \to R$, $f(x) = \begin{cases} 1, x \in Q \\ 0, x \in R - Q \end{cases}$

Funcţia lui Riemann

Fie funcţia : $R \to R$, $f(x)=\begin{cases} 0, \text{dacă } x = 0 \text{ sau } x \in R - Q \\ \frac{1}{q}, \text{dacă } x = \frac{p}{q}, q \in N^{\bullet}, p \in Z, (p,q) = 1 \end{cases}$

Funcţia lui Heaviside

Fie funcţia : $R \to R$, $f(x) = \begin{cases} 0, x \langle 0 \\ 1, x \geq 0 \end{cases}$

FUNCŢII DERIVABILE

<u>**Definiţie**</u>: Fie funcţia $f : D \to R$, $D \subset R$, $x_0 \in D$ punct de acumulare a lui D. Funcţia f este **derivabilă** în x_0 :

– dacă $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in R$;

– dacă $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{R}$ funcţia are **derivată** în punctul x_0.

Notăm $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ care este **derivata funcţiei în x_0**.

Observaţii:

1) Dacă derivata $f'(x_0)$ este $-\infty$ sau $+\infty$ atunci funcţia f nu este derivabilă în x_0.
2) În punctele izolate nu se pune problema derivatei;
3) Dacă funcţia f este derivabilă în fiecare punct al domeniului D atunci ea este derivabilă pe D.

Derivate laterale

Fie funcţia $f : D \to R$, $D \subset R$, $x_0 \in D$ punct de acumulare a lui $D \cap (-\infty, x_0)$.

– Dacă $\exists f'_s(x_0) = \lim_{x \uparrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{R}$, ea se numeşte **derivata la stânga** în x_0.

– Dacă $\exists f'_s(x_0) = \lim_{x \uparrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in R$, atunci f este derivabilă la stânga în x_0.

– Analog **derivata la dreapta**.

Teoreme

1) Orice funcţie derivabilă într-un punct este continuă în acel punct.
2) Dacă funcţia $f : D \to R$ este derivabilă în $x_0 \in D$ atunci f este derivabilă atât la stânga cât şi la dreapta în x_0 şi $f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$;
3) Reciproc dacă f este derivabilă atât la stânga cât şi la dreapta în x_0 şi, avem $f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$ atunci funcţia f este derivabilă în x_0 şi $f'(x_0) = f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$;

Tangenta la graficul funcţiei

Dacă f este derivabilă în x_0, atunci $f'(x_0)$ reprezintă panta (coeficientul unghiular) tangentei la graficul funcţiei în punctul $M(x_0, y_0)$, $y_0 = f(x_0)$ şi $f'(x_0) = \text{tg}\,\varphi$.
Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei este : $\mathbf{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}$.

Observaţii:
1) Dacă $f'(x_0)$ este infinită atunci tangenta la graficul funcţiei este paralelă cu axa Oy.
2) $f'_s(x_0)$ reprezintă panta semitangentei la stânga în x_0 şi $f'_d(x_0)$ reprezintă panta semitangentei la dreapta în x_0.

REGULI DE DERIVARE

1) $(f + g)' = f' + g'$;
2) $(f - g)' = f' - g'$;
3) $(f \cdot g)' = f'g + fg'$;
3') $(cf)' = cf'$;
4) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$;
4') $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$;
5) derivata funcţiei compuse $(f \circ g)' = f'(g)\,g'$;
6) derivata funcţiei inverse $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, unde $y_0 = f(x_0)$ şi $f'(x_0) \neq 0$.

Tabelul derivatelor funcțiilor

Funcția	**Derivata**	**Mulțimea pe care funcția este derivabilă**	**Funcția compusă**	**Derivata**
C (constantă)	0	$\mathbb{R}$	-	-
x	1	$\mathbb{R}$	u	u'
x^n	$n\cdot x^{n-1}$	$\mathbb{R}$	u^n	$n\cdot u^{n-1}\cdot u'$
x^r	$r\cdot x^{r-1}$	$(0;+\infty)$	u^r	$r\cdot u^{r-1}\cdot u'$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0;+\infty)$	$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2\sqrt{u}}u'$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(0;+\infty)$	$\ln u (u>0)$	$\frac{1}{u}u'$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	e^u	$e^u\cdot u'$
$a^x (a>0; a\neq 1)$	$a^x\cdot\ln a$	$\mathbb{R}$	$a^u (a>0; a\neq 1)$	$a^u\cdot\ln a\cdot u'$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin u$	$(\cos u)\cdot u'$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos u$	$(-\sin u)\cdot u'$
tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$	tgu	$\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R}-\{k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$	$ctgu$	$-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1;1)$	$\arcsin u$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1;1)$	$\arccos u$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$arctgx$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$arctgu$	$\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$
$arcctgx$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$arcctgu$	$-\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$

Derivate de ordin superior

Fie funcţia $f : D\to R$, $D\subset R$, derivabilă pe D rezultă $f' : D\to R$, funcţia f este **derivabilă de două** ori în $x_0\in D$ dacă funcţia f' este derivabilă în x_0. Derivata funcţiei f' în x_0 se numeşte **derivata de ordinul doi** a funcţiei f în x_0 şi se notează $f''(x_0)$, deci :

$$f''(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}.$$

Notăm derivatele de ordinul:

trei – cu: f''',

patru – cu: $f^{(4)}$,

cinci – cu: $f^{(5)}$,

. . . ,

n – cu: $f^{(n)}$.

REGULA LUI L'HOSPITAL

Regula lui l'Hospital – pentru cazurile : $\frac{0}{0}$ şi $\frac{\infty}{\infty}$

Fie funcţiile f ,g : $I\setminus\{x_0\} \to R$, x_0 un punct de acumulare al lui I, dacă:
1) f, g sunt derivabile pe $I\setminus\{x_0\}$;
2) $g(x) \neq 0\ \forall x \in I\setminus\{x_0\}$,
3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, sau
3') $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = \infty$
4) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ ($\ell \in \overline{R}$) atunci
$\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$.

Observaţie:
1) Reciproca teoremei lui l'Hospital nu este adevărată;
2) Dacă după aplicarea regulii lui l'Hospital nu se elimină nedeterminarea din cazul $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$ se verifică în continuare condiţiile din teoremă şi se repetă calculele.
3) Aplicarea regulii lui l'Hospital nu este întotdeauna avantajoasă şi în aceste condiţii se recomandă folosirea ei în combinaţie cu limitele tip de la funcţii.

Regula lui l'Hospital – pentru cazul: $0\cdot\infty$

Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = \infty$, scriem : $fg = \frac{f}{\frac{1}{g}}$ sau $fg = \frac{g}{\frac{1}{f}}$ şi am redus calculele la cazul $\frac{0}{0}$ respectiv $\frac{\infty}{\infty}$;

Regula lui l'Hospital – pentru cazul: $\infty-\infty$.

Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, scriem : $f - g = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}}$ şi am redus cazul $\infty-\infty$ la $\frac{0}{0}$;

sau $f - g = f\left(1 - \frac{g}{f}\right)$ situaţie în care calculăm $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)}$ cu regula lui l'Hospital şi revenim la calculul limitei.

Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$ suntem în cazul $\infty 0$.

Recomandăm calcularea limitei prin reducerea la forma $\frac{0}{0}$ adică $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1 - \frac{g}{f}}{\frac{1}{f}}$.

ROLUL DERIVATELOR ÎN STUDIUL FUNCŢIILOR

ROLUL DERIVATEI ÎNTÂI ÎN STUDIUL FUNCŢIILOR

Intervalele de monotonie

1) Dacă $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in I$ atunci funcţia f este **monoton crescătoare** pe I;
2) Dacă $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in I$ atunci funcţia f este **monoton descrescătoare** pe I.

Punctele de extrem

Dacă pe un interval I derivata întâi este strict pozitivă (+) la stânga lui x_0 şi strict negativă (–) la dreapta lui x_0, atunci x_0 este **punct de maxim** local al funcţiei f

+ + + **0** – – –
↗ **M** ↘
punct de maxim

Dacă pe un interval I derivata întâi este strict negativă (–) la stânga lui x_0 şi strict pozitivă (+) la dreapta lui x_0, atunci x_0 este **punct de minim** local al funcţiei f.

– – – **0** + + +
↘ **m** ↗
punct de minim

Observaţii:
1) Punctele de maxim local sau minim local se numesc puncte de extrem local.
2) Dacă derivata întâi are acelaşi semn de o parte şi de alta a lui x_0 (+ 0 + sau – 0 –) atunci x_0 nu este punct de extrem al funcţiei f.

ROLUL DERIVATEI A DOUA ÎN STUDIUL FUNCŢIILOR

Convexitate şi concavitate

1) Dacă $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in I$ atunci funcţia f este **convexă** pe I;
2) Dacă $f''(x) \leq 0$, $\forall x \in I$ atunci funcţia f este **concavă** pe I.

Punct de inflexiune

Dacă pe un interval I derivata a doua este strict pozitivă (+) la stânga lui x_0 şi strict negativă (–) la dreapta lui x_0 (sau invers), atunci x_0 este un **punct de inflexiune** al funcţiei f.

+ + + **0** – – –
$\cup$ i $\cap$
punct de inflexiune

– – – **0** + + +
$\cap$ i $\cup$
punct de inflexiune

Observaţie:
Fie funcţia $f : I \rightarrow R$, o funcţie de două ori derivabilă pe I şi fie x_0 un punct de extrem local din interiorul intervalului I ($f'(x) = 0$) atunci:
i) Dacă $f''(x) > 0$, atunci x_0 este un punct de minim local;
ii) Dacă $f''(x) < 0$, atunci x_0 este un punct de maxim local.

PRIMITIVE

Fie funcţia $f : I \to R$, I – intervalul, $I \subset R$. $\Rightarrow F : I \to R$ este o primitivă a funcţiei f dacă:
1) F – este derivabilă;
2) F' = f .

Notaţie: $F(x) = \int f(x)\,dx$ – integrala nedefinită a funcţiei f.

Observaţie: Integrala nedefinită este o mulţime infinită de funcţii

Proprietăţi

1) Fie funcţia $f : I \to R$, I – intervalul, $I \subset R$. şi $F_1, F_2 : I \to R$ sunt două primitive ale lui f (pe I),
$\Rightarrow F_1(x) - F_2(x) = c$ (diferă printr–o constantă), $\forall x \in I$ şi $c \in R$.
2) $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ – integrala sumei este egală cu suma integralelor
3) $\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$ – constanta iese de sub integrală
Observaţie:

$$\int \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) \right) dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int f_i(x)\,dx$$

4) $\int f(x)\,dx = \int f(x)\,dx + C = F(x) + C$, unde C – constantă
5) Fie funcţia $f : I \to R$, o funcţie care admite primitive pe I. Atunci funcţia f are proprietatea lui Darboux.
Corolar : Dacă funcţia $f : I \to R$, nu are proprietatea lui Darboux pe I, atunci funcţia f nu admite primitive pe I.
6) Fie funcţia $f : I \to R$. Dacă $f(I) = \{f(x) / x \in I\}$, **nu este interval**, atunci funcţia f **nu admite primitive** pe intervalul I.
7) Fie funcţia $f : I \to R$, **o funcţie continuă** pe I, atunci f **admite primitive** pe I.

Tabelul integralelor nedefinite

21.	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -ctg\, x + C$	1.	$\int dx = x + C$
22.	$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tg\, x + C$	2.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
23.	$\int (1 + tg^2 x)\, dx = tg\, x + C$	3.	$\int x\, dx = \frac{x^2}{2} + C$
24.	$\int \frac{1}{x^2 - a^2}dx = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$	4.	$\int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$
25.	$\int \frac{1}{x^2 - 1}dx = \frac{1}{2} \ln\left\lvert\frac{x-1}{x+1}\right\rvert + C$	5.	$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{x} + C$
26.	$\int \frac{1}{x^2 + a^2}dx = \frac{1}{a} arctg\, \frac{x}{a} + C$	6.	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$
27.	$\int \frac{1}{x^2 + 1}dx = arctg\, x + C$	7.	$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C$
28.	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$	8.	$\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C$
29.	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}dx = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 - a^2}\right\rvert + C$	9.	$\int \ln x\, dx = x\ln x - x + C$
30.	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$	10.	$\int e^x dx = e^x + C$
31.	$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}dx = \arcsin x + C$	11.	$\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$
32.	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$	12.	$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
33.	$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = -\sqrt{a^2 - x^2} + C$	13.	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
34.	$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$	14.	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$
35.	$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 - a^2}\right\rvert + C$	15.	$\int tg\, x\, dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$
36.	$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$	16.	$\int ctg\, x\, dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$
37.	$\int f(x)\, dx = F(x) + C$ F primitiva funcției f	17.	$\int f'(x)\, dx = f(x) + C$
38.	$\int F(x)f(x)\, dx = \frac{F^2(x)}{2} + C$	18.	$\int f(x)f'(x)\, dx = \frac{f^2(x)}{2} + C$
39.	$\int \frac{f(x)}{F(x)}dx = \ln\lvert F(x)\rvert + C$	19.	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$
40.	$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$	20.	$\int f^n(x)f'(x)\, dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C$

INTEGRAREA PRIN PĂRŢI

Teoremă

Fie I un interval. Dacă funcţiile f, g : I$\to$R, sunt derivabile cu derivatele continue, atunci funcţiile f ’g şi fg’ admit primitive şi are loc relaţia: **$\int$ fg’ dx = fg – $\int$ f ’g dx**

<u>Mod de lucru</u>

Alegem	**Calculăm**
f	f ’
g’	g = $\int$ g’ dx

SCHIMBAREA DE VARIABILĂ (METODA SUBSTITUŢIEI)

Teoremă

Fie I, J două intervale din R şi funcţiile g : I $\to$J, f : J$\to$R, cu proprietăţile:
1) g este derivabilă;
2) f admite primitive (cu F o primitivă a sa).
Atunci funcţia (fog) g’ admite primitive pe I şi avem : $\int$ f(g(x))g’(x) dx = F(g(x)) + C

<u>Mod de lucru</u>

i) Notăm : g(x) = y (astfel încât să ajungem la formulele învăţate);
ii) Difernţiem : (g(x))’ dx = y’ dy
iii) Alegem expresiile convenabile pentru a putea forma expresii integrabile cunoscute sub forma unor formule de integrare;
iv) Deducem primitiva în noua variabilă;
v) Revenim la substituţia făcută.

INTEGRAREA FUNCŢIILOR RAŢIONALE

Funcţiile raţionale simple

1) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

2) f (x) = $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, n $\in$ **N***, x $\in$ I$\subset$ $(-\infty, a)$ sau x $\in$ I$\subset$ $(a, +\infty)$.

3) f(x) = $\dfrac{Bx + C}{(x^2 + bx + c)^n}$, n $\in$ **N***, $b^2 - 4c < 0$.

Teorema de descompunere în funcţii raţionale simple
Oricare funcţie raţională poate fi descompusă sub forma unei sume finite de funcţii raţionale simple.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \sum_{k=1}^{p}\left[\frac{A_k^1}{x-a_k} + \frac{A_k^2}{(x-a_k)^2} + \ldots + \frac{A_k^{m_k}}{(x-a_k)^{m_k}}\right] + \sum_{i=1}^{q}\left[\frac{B_i^1 x + C_i^1}{x^2+b_i x + c_i} + \right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{B_i^{n_i} x + C_i^{n_i}}{(x^2+b_i x + c_i)^{n_i}}\right]$$ unde C(x) este câtul împărţirii polinomului P(x) la polinomul Q(x) atunci

când : grad P $\geq$ grad Q , iar din P = CQ + R

$\Rightarrow$ $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ şi funcţiei raţionale $\frac{R(x)}{Q(x)}$ i se aplică :

Teorema de descompunere în funcţii raţionale simple pentru

$$Q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 =$$
$$= a_n \cdot (x-a_1)^{k1} \ldots (x-x_p)^{kp} \cdot (x^2+b_1x+c_1)^{i1} \cdot \ldots \cdot (x^2+b_qx+c_q)^{iq}, \ b_{iq}^2 - 4c_{iq} < 0.$$

INTEGRALE DEFINITE

FORMULA LEIBNIZ – NEWTON

Fie funcţia f : [a, b] $\to$ R, o funcţie continuă, şi F : [a, b] $\to$ R o primitivă a funcţiei f pe [a, b].

Atunci : $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Teoremă

Fie funcţiile f, g : [a, b] $\to$ R,

1) f – funcţie continuă pe [a, b];

2) fie A $\subset$ [a, b], A - o **mulţime finită de puncte de discontinuitate de speţa întâi** pentru funcţia g ;

3) f(x) = g(x), $\forall x \in [a, b] - A$, **atunci**: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$

Proprietăţi

1) Fie funcţiile f, g : [a, b] $\to$ R, două funcţii continue pe [a, b] , atunci:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

2) Fie funcţia f : [a, b] $\to$ R, o funcţie continuă pe [a, b], şi $\lambda \in$ **R** atunci :

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

3) Fie funcţia f : [a, b] $\to$ R, o funcţie continuă pe [a, b], şi $c \in (a, b)$ atunci (**proprietatea de aditivitate**):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

4) Fie funcţia f : [a, b] $\to$ R, $\exists$ c $\in$ (a, b) astfel încât $\int_a^b f(x)\,dx = c\,(b-a)$, **proprietatea de medie**.

5) Fie funcţia f : [a, b] $\to$ R, o funcţie continuă pe [a, b], şi f(x) $\geq$ 0, $\forall$ x $\in$ [a, b] , atunci :

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0 .$$

Corolar : fie f, g : [a, b] $\to$ R două funcţii continue cu proprietatea f(x) $\leq$ g(x) $\forall$ x $\in$ [a, b].

Atunci: $$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

6) Fie funcţia f : [a, b] $\to$ R, o funcţie continuă pe [a, b], şi m $\leq$ f(x) $\leq$ M, $\forall$ x $\in$ [a, b] , atunci :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

7) Fie funcţia f : [a, b] $\to$ R, o funcţie continuă, atunci | f | este continuă şi are loc :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Corolar : Fie funcţia f : [a, b] $\to$ [0, +∞) continuă pe [a, b] , atunci oricare ar fi intervalul [c, d] $\subset$ [a, b] are loc inegalitatea :

$$\int_c^d f(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$$

Definiţii: Fie funcţia f : [a, b] $\to$ [0, +∞) continuă pe [a, b], atunci prin definiţie:

i) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$;

ii) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

INTEGRAREA PRIN PĂRŢI

Fie funcţiile f, g : [a, b] $\to$ R două funcţii derivabile, cu derivatele continue, atunci :

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

METODA SCHIMBĂRII DE VARIABILĂ (METODA SUBSTITUŢIEI)

Teoremă

Fie [a, b], J două intervale din R şi funcţiile g : [a, b] $\to$ J, f : J $\to$ R, cu proprietăţile:
1) g este derivabilă cu derivata continuă pe [a, b];
2) f continuă pe J.

$$\int_a^b f(g(x))\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$ (vezi modul de lucru)

<u>Mod de lucru</u>

i) Notăm : g(x) = t (astfel încât să ajungem la formulele învăţate);
ii) Difernţiem : (g(x))’ dx = t’ dt
iii) Calculăm : x = a $\Rightarrow$ t = g(a) şi x = b $\Rightarrow$ t = g(b)

iv) aplicăm formula de mai sus.

Observaţie:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)dx, \begin{cases} daca\ f\ este\ functie\ para \\ f(-x) = f(x), \forall x \in [-a,a] \end{cases} \\ 0, \begin{cases} daca\ f\ este\ functie\ impara \\ f(-x) = -f(x), \forall x \in [-a,a] \end{cases} \end{cases}$$

APLICAŢII ALE INTEGRALEI DEFINITE

ARIA UNEI SUPRAFEŢE MĂRGINITE DE GRAFICE DE FUNCŢII

Fie funcţiile f,g : [a, b] $\rightarrow$ R continue (sau discontinue într-un număr finit de puncte de discontinuitate de speţa întâi). Presupunem că g(x) $\leq$ f(x) $\Rightarrow$ **A =** $\int_{a}^{b} [\, f(x) - g(x)\,]\, dx$

VOLUMUL UNUI CORP DE ROTAŢIE

Fie funcţia f : [a, b] $\rightarrow$ R continuă $\Rightarrow$ **V =** $\pi \int_{a}^{b} f^{\,2}(x)\, dx$

TESTE PROPUSE
SUBIECTUL III BACALAUREAT

TESTUL 1

1) Fie $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \sqrt{2x+1}$.

a) Arătați că f este strict crescătoare pe $[0,\infty)$.

b) Determinați mulțimea valorilor funcției f.

c) Arătați că f este convexă pe $[0,\infty)$.

2) Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)= xe^{-x}\cos x$.

a) Să se arate că $\int_o^{\pi} f(x)\, e^x dx = -2$.

b) Să se calculeze $\int_1^2 \frac{f(x)}{\cos x} dx$.

c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$, știind că $\int_0^a \frac{f(x)}{\cos x}\ x\, dx = \frac{a}{3}$.

TESTUL 2

1) Se consideră funcția $f:(1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\cdot\ln(x-1)$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$.

b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f, în punctul de abscisă $x_0 = e+1$.

c) Să se arate că $\frac{(x-1)f(x)}{x} + \frac{1}{e} \geq 0$, $\forall\ x > 1$.

2) Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x}+2x^2+2$.

a) Să se arate că $\int_0^1 (f(x) - e^{2x} - 2)dx = \frac{2}{3}$.

b) Arătați că $\int_{-1}^1 x(f(x) - 2x^2 - 2)dx = \frac{1}{4}\cdot(e^2+3e^{-2})$.

c) Determinați $a \in (0,1)$ știind că $\int_0^a \frac{1}{f(x)-e^{2x}} dx = \frac{1}{2}$.

TESTUL 3

1) Se consideră funcția f:(0,∞) → ℝ, $f(x)=\frac{x}{x+2021}$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

b) Să se arate că f'este descrescătoare pe (0,∞).

c) Să se determine ecuația asimptotei orizontale la $+\infty$.

2) Se consideră $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx$.

a) Calculați I_0.

b) Calculați I_1.

c) Demonstrați că $I_{2017} - I_{2021} = \frac{2}{2019^2-1}$.

TESTUL 4

1) Se consideră funcția f:ℝ → ℝ, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+1}, x \le 1 \\ \ln x + a, x > 1 \end{cases}$

a) Să se determine a∈ ℝ pentru care f admite primitive pe ℝ.

c) Să se calculeze asimptota orizontală a funcției f la $-\infty$.

b) Să se demonstreze că orice primitivă F a funcției f este convexă pe (1,∞).

2) Se consideră funcția f:(-3,∞) → ℝ, $f(x) = \frac{x}{x+3}$.

a) Să se arate că $\int_0^1 (x+3)^2 \cdot f(x)dx = \frac{11}{6}$.

b) Să se calculeze $2\int_0^1 x^2 f(x)dx + \int_0^1 x^3 f(x)dx$.

c) Să se determine a∈ ℝ știind că $\int_1^a f(x)dx = a + 2$.

TESTUL 5

1) Se consideră funcția f:(0,∞) → ℝ, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

a) Arătați că $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ pentru orice $x \in (0,\infty)$.

b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

c) Arătați că f(x) ≤ e^{-1} pentru orice x ∈ $(0, \infty)$.

2) Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 (1-x)^n \cdot e^x dx$.

a) Arătați că $I_1 = e-2$.

b) Calculați I_2.

c) Arătați că $I_{n+1} + 1 = (n+1) \cdot I_n$.

TESTUL 6

1) Se consideră funcția f:ℝ → ℝ, f(x)=$\sqrt{x^2 - x + 1}$.

a) Calculați f′(x), x∈ ℝ.

b) Determinați ecuația asimptotei spre +∞ la graficul funcției f.

c) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

2) Se consideră funcția f: ℝ → ℝ, f(x) = x^2 -x+1.

a) Arătați că $\int_0^1 f(x)dx = \frac{5}{6}$.

b) Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)} dx$. Arătați că $I_{n+1} \leq I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

c) Determinați numărul real pozitiv a știind că $\int_1^a \frac{2x-1}{f(x)} dx = \ln 3$.

TESTUL 7

1) Se consideră funcția f: ℝ → ℝ, f(x) = $\frac{x+1}{x^2+x+1}$.

a) Să se arate că $f'(x) = \frac{-x^2 - 2x}{(x^2+x+1)^2}$.

b) Să se determine asimptotele la graficul funcției f.

c) Să se studieze monotonia funcției f.

2) Fie șirul $(I_n)_n$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{2x+5} dx, n \in \mathbb{N}$.

a) Să se calculeze I_1.

b) Să se arate că $2I_{n+1} + 5I_n = \frac{1}{n+1}$.

c) Să se determine $a > 0$ știind că $I_0 = \ln a^2$.

TESTUL 8

1) Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^{-2x}}{x+2}$.

a) Arătați că $f'(x) = -\frac{2x+5}{(x+2)^2} e^{-2x}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

b) Determinați asimptotele funcției f.

c) Determinați monotonia funcției f.

2) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$.

a) Calculați $\int xf(x)dx$.

b) Arătați că $\int_0^1 (f(x) + x)dx = e - 1$.

c) Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(2) = e^2$.